3 coll

النشر والتعميل والمتطابقات الهامة

تذكير بالإشارات :

إشارات + و - :

إشاراتان متشابهتان : نحتفظ بنفس الإشارة مع جمع العددين .

$$\begin{cases} 6+2=8 \\ -6-2=-8 \end{cases}$$

(ملاحظة : 6=+6)

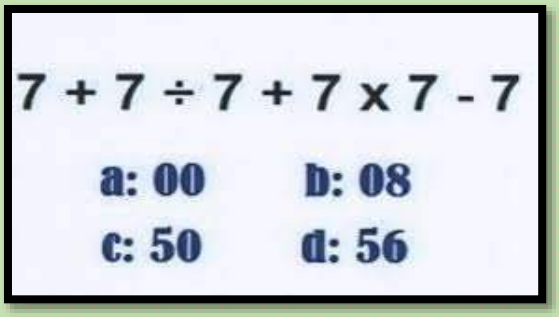
إشاراتان مختلفتان : نحتفظ بإشارة العدد الأكبر مع فرق العددين .

$$\begin{cases} -6+2=-4 \\ 2-6=-4 \\ -2+6=4 \\ 6-2=\ \ 4 \end{cases}$$

عددان متقابلان :

$$\begin{cases} 7-7=0 \\ -7+7=0 \end{cases}$$

نقوم أولا بعملية الضرب والقسمة



إشارات × و ÷ :

إشاراتان متشابهتان = +

$$\begin{cases} 6\times 2=12 \\ -6\times -2=12 \\ 6\div 2=3 \\ -6\div -2=3 \end{cases}$$

إشاراتان مختلفتان = -

(ملاحظة : $a\times b=ab=a.b$)

$$\begin{cases} 6\times -2=-12 \\ -6\times 2=-12 \\ -6\div 2=-3 \\ 6\div -2=-3 \end{cases}$$

أمثلة :

$A=-5x(\ 2x-3)+[6x-3(4x-5)]$

$=-5x\times 2x-5x\times(-3)+[6x-3\times 4x-3\times(-5)]$ أولا نحسب مابداخل القوس الصغير

$=-10x^2+15x+[6x-12x+15]$

$=-10x^2+15x+6x-12x+15$ ← عزل الحدود المتشابهة

www.hsaina.com

$= -10x^2 + 9x + 15$

$B= 6 - 4 \times \frac{3}{2} - 4 \div \frac{4}{5} + 5$ ← نقوم أولا بعملية الضرب والقسمة

$=6 - \frac{12}{2} - \cancel{4} \times \frac{5}{\cancel{4}} + 5$

$= 6 - 6 - 5 + 5$ جمع عددان متقابلان=0

$= 0 + 0 = 0$

نوحد المقام ب 6 حيث لدينا 6 من مضاعفات 3 لأن $3 \times 2 = 6$ و $\frac{4}{6} - \frac{2\times8}{2\times3}$

$$C= \frac{\frac{4}{6}-\frac{8}{3}}{1+\frac{5}{7}} = \frac{\frac{4}{6}-\frac{16}{6}}{\frac{7}{7}+\frac{5}{7}} = \frac{\frac{4-16}{6}}{\frac{7+5}{7}} = \frac{\frac{-12}{6}}{\frac{12}{7}} = \frac{-\cancel{12}}{6} \times \frac{7}{\cancel{12}} = -\frac{7}{6}$$

$1 + \frac{5}{7} = \frac{1}{1} + \frac{5}{7} = \frac{1\times7}{1\times7} + \frac{5}{7} = \frac{7}{7} + \frac{5}{7}$ نوحد المقام ب 7 حيث لدينا 7 من مضاعفات1 لأن $1 \times 7 = 7$

تمرين تطبيقي:

أحسب مايلي:

$A= 2a \times [3 - 2a(5a + 6)]$ $B= 6 - [4a + 8 - 2(3a - 5)$

$C= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \times 6$ $D= (\frac{3}{2} - \frac{8}{10}) \times \frac{10}{7}$ $E= \frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{5}}{\frac{6}{14}-\frac{2}{7}} \times \frac{2}{3}$

1) النشر:

تعريف : النشر هو تحويل جداء إلى مجموع أو فرق.

قاعدة 1 :

a و b و c أعداد حقيقية

(b+c) a= ab + ac **a (b+c)=ab + ac**

(b-c+d) a= ab – ac+ad و **a (b-c+d)=ab – ac+ad**

ملاحظة:الجمع والطرح والضرب تبادلي.

$-3 \times 2 = 2 \times -3 = -6$ و $3 - 2 = -2 + 3 = 1$ و $3 + 2 = 2 + 3 = 5$ ولكن $\frac{3}{2} \neq \frac{2}{3}$

أمثلة:

$A=3 (x + 2)= (x + 2) \times 3$ ← الضرب تبادلي

$= 3 \times x + 3 \times 2 = 3x + 6$

www.hsaina.com

$B=-2(4x+6)=-2\times 4x-2\times 6=-8x-12$

$C=\frac{5}{3}x\left(-3x+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{3}x\times(-3x)+\frac{5}{3}x\times\frac{1}{2}=-5x^2+\frac{5}{6}x$

$D=-\sqrt{2}\,(3a-7)=-\sqrt{2}\times 3a-\sqrt{2}\times -7=-3\sqrt{2}\,a+7\sqrt{2}$

$E=-\sqrt{2}(\sqrt{3}\,a-\sqrt{7})=-\sqrt{2}\times\sqrt{3}\,a\times-\sqrt{2}\times-\sqrt{7}=-\sqrt{6}\,a+\sqrt{14}$

$F=6x(-2x+3)-4x(-3x+2)=6x\times-2x+6x\times 3-4x\times-3x-4x\times 2$

$=-12x^2+18x+12x^2-8x=-\cancel{12x^2}+\cancel{12x^2}+18x-8x$

$=10x$

تمرين تطبيقي:

أنشر ثم بسط مايلي :

$A=3(-2x+4)$; $B=\sqrt{5}(x-3)$; $C=-2\left(3x+\frac{5}{2}a-\frac{1}{3}\right)$

$D=\sqrt{3}(-\sqrt{3}\,x+2)-(-3x+2\sqrt{3})$

قاعدة 2

a وb وc و d أعداد حقيقية .

النشر

(a+b) (c+d) = **a c+a d+b c+b d**

التعميل

أمثلة :

الطريقة 1 : (a+b) (c+d)=a c+a d+b c+b d

النشر ← $A=(5x-3)(2x+1)=5x\times 2x+5x\times 1-3\times 2x-3\times 1$

التبسيط ← $=10x^2+5x-6x-3$

$-1x=-x$ ← $=10x^2-x-3$

$B=(-3x-2)(4-6x)$

النشر ← $=-3x\times 4-3x\times-6x-2\times 4-2\times-6x$

$=-12x+18x^2-8+12x$

التبسيط ← $=18x^2-\cancel{12x}+\cancel{12x}-8$

$=18x^2-8$

$C=(2x-1)(2x+3)+\frac{1}{3}(-12x^2+9)$

www.hsaina.com

$=2x \times 2x + 2x \times 3 - 1 \times 2x - 1 \times 3 + \frac{1}{3} \times -12x^2 + \frac{1}{3} \times 9$ ← النشر

$=4x^2 + 6x - 2x - 3 - \frac{12}{3}x^2 + \frac{9}{3}$

$=4x^2 + 4x - 4x^2 - 3 + 3$

$=\cancel{4x^2} - \cancel{4x^2} + 4x - 3 + 3$ ← نجمع الحدود المتشابهة ثم نبسط

$=4x$

$D=(1+\sqrt{2})(3\sqrt{2}-6)$

$=1 \times 3\sqrt{2} + 1 \times -6 + \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} + \sqrt{2} \times -6$

$=3\sqrt{2} - 6 + 3\sqrt{2}^2 - 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 6 + 3 \times 2 - 6\sqrt{2}$

$=3\sqrt{2} - 6\sqrt{2} - 6 + 6 = \sqrt{2}(3-6) + 0 = \sqrt{2} \times (-3)$

$=-3\sqrt{2}$

2) التعميل :

تعريف : التعميل هو تحويل مجموع أو فرق إلى جداء وذلك بالتعرف على عامل مشترك

قاعدة : a و b و c أعداد حقيقية.

$ab + ac = a(b+c)$

$ab - ac = a(b-c)$

أمثلة :

$A=5x^2 - 15x = 5x \times x - 3 \times 5x$

$=5x(x-3)$ ← العامل المشترك هو $5x$

$B=-2x(x-1) + 6(x-1)$

$= (x-1)(-2x+6)$

$C= (x-2)\left(\frac{5}{2}x - 3\right) + \left(-\frac{3}{2}x + 5\right)(x-2)$ ← العامل المشترك هو $(x-2)$

$= (x-2)(\frac{5}{2}x - 3 - \frac{3}{2}x + 5)$

$=(x-2)(\frac{5}{2}x - \frac{3}{2}x - 3 + 5)$

$=(x-2)\left(\frac{5-3}{2}x - 3 + 5\right)$

$=(x-2)(x+2)$

www.hsaina.com

$D=(x-3)^2-(x-3)(5x+2)$

$=(x-3)\big(x-3-(5x+2)\big)=(x-3)(x-3-5x-2)$

$=(x-3)(x-5x-3-2)$

$=(x-3)(-4x-5)$

تمرين تطبيقي : عمل مايلي :

$A=7x^2-21x$; $B=5x(2x-1)-(x-2)(2x-1)$

$C=(3x+2)(x-6)-(5x+1)(3x+2)$

$D=(3x+1)^2(5x-2)+(1+3x)(2x+6)$

3) المتطابقات الهامة : تستخدم لتسهيل عملية نشر وتعميل بعض العمليات.

المتطابقة 1 :

a و b *عددان حقيقيان*

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

أمثلة النشر :

أنشر وبسط مايلي :

$A=(x+3)^2=x^2+2\times x\times 3+3^2=x^2+6x+9$

$(a+b)^2=a^2+2\times a\times b+b^2$

$\boxed{(3x)^2=3^2\times x^2 \text{ و } \sqrt{7}^2=7}$

$B=(3x+\sqrt{7})^2=(3x)^2+2\times(3x)\times\sqrt{7}+\sqrt{7}^2=9x^2+6\sqrt{7}+7$

$(a+b)^2=(a)^2+2\times(a)\times b+b^2$

$C=(2\sqrt{3}+5x)^2=(2\sqrt{3})^2+2\times 2\sqrt{3}\times 5x+(5x)^2$

$=2^2\times\sqrt{3}^2+2\times 2\times 5\sqrt{3}\,x+5^2\times x^2=12+20\sqrt{3}\,x+25x^2$

تمرين تطبيقي : أنشر وبسط مايلي :

$A=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ و $B=\left(\frac{1}{3}+2\sqrt{3}\right)^2$

أمثلة التعميل :

عمل مايلي :

$A=9x^2+30x+25=(3x)^2+2\times 3x\times 5+5^2=(3x+5)^2$

$a^2+2\times a\times b+b^2=(a+b)^2$

$B=6x^2+2\sqrt{18}\,x+3=(\sqrt{6}\,x)^2+2\times\sqrt{6}\,x\times\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=(\sqrt{6}\,x+\sqrt{3})^2$

$C=4x^2+12x+9=(\dots)^2+2\times\dots\times\dots+(\dots)^2$ أكمل مايلي :

www.hsaina.com

المتطابقة 2 :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

أمثلة النشر : أنشر وبسط مايلي :

$$A=\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2 = \sqrt{5}^2 - 2\times\sqrt{5}\times\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 = 5 - 2\times\sqrt{5\times 2} + 2$$

$$=5+2-2\sqrt{10} = 7-2\sqrt{10}$$

$$B=\left(3\sqrt{5}-1\right)^2 = \left(3\sqrt{5}\right)^2 - 2\times 3\sqrt{5}\times 1 + 1^2 = 9\times 5 - 2\times 1\times 3\sqrt{5} + 1^2$$

$$=45-6\sqrt{5}+1 = 46-6\sqrt{5}$$

تمرين تطبيقي : أنشر وبسط مايلي :

$$A=\left(\sqrt{3}-2x\right)^2 \quad \text{و} \quad B=\left(2\sqrt{7}-5x\right)^2$$

أمثلة التعميل : عمل مايلي :

$$A=64x^2-16x+1 = (8x)^2 - 2\times 8x\times 1 + 1^2 = (8x-1)^2$$

$$B=x^2-2x+5 = x^2 - 2\times x\times 5 + 5^2 = (x-5)^2$$

$$C=3-4\sqrt{3}\,x+4x^2 = (\dots)^2 - 2\times\dots\times\dots + (\dots)^2$$

أكمل مايلي :

المتطابقة 3 :

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

أمثلة النشر : أنشر وبسط مايلي :

$$A=\underbrace{(x-3)(x+3)} = \underbrace{x^2-3^2} = x^2-9$$

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$

$$B=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-a\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+a\right) = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - a^2 = \frac{\sqrt{5}^2}{2^2} - a^2 = \frac{5}{4} - a^2$$

$$C=(5x+3)(5x-3) = (5x)^2 - 3^2 = 25x^2-9$$

$$D=\left(\sqrt{7}-3\right)\left(\sqrt{7}+3\right) = (\dots)^2 - (\dots)^2$$

أمثلة التعميل : عمل مايلي :

$$A=25x^2-81 = (5x)^2 - 9^2 = (5x+3)(5x-3)$$

$$B=\left(\sqrt{3}-2\right)^2 - 25 = \left(\sqrt{3}-2\right)^2 - 5^2 = \left(\sqrt{3}-2+5\right)\left(\sqrt{3}-2-5\right)$$

$$=\left(\sqrt{3}+3\right)\left(\sqrt{3}-7\right)$$

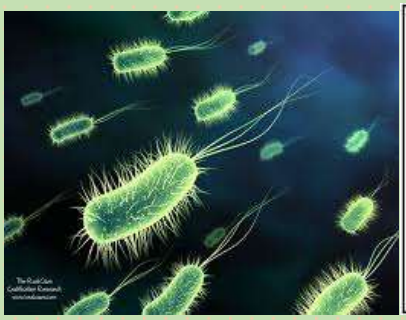
$$C=9x^2-25 = (\dots-\cdots)(\dots+\cdots)$$

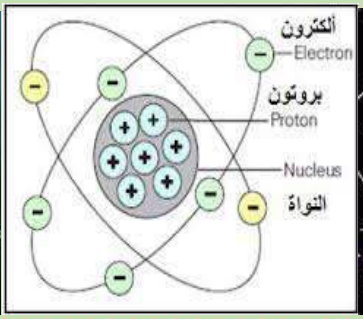
3 coll

القـــــوى

مقدمة :

عند التعامل مع الأعداد الصغيرة جداً كطول البكتيريا والألكترونات أو الأعداد الكبيرة جداً كالمسافة بين الكواكب والشمس , فقد تحتاج إلى كتابة هذه الأعداد على شكل قوة لها أساس وأس.





I. قوى عدد حقيقي :

a عدد حقيقي غير منعدم و n عدد صحيح طبيعي[1] أكبر من 1 لدينا :

أساس

أس

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots\dots\dots \times a}_{n \text{ من العوامل}}$$

قوة

✓ a^n تقرأ a أس n

✓ a^2 تقرأ a أس 2 أو a مربع

✓ a^3 تقرأ a أس 3 أو a مكعب

✓ $0^n = 0$ بشرط $n \neq 0$

✓ 0^0 الكتابة لا معنى لها

✓ $a^0 = 1$ بشرط $a \neq 0$

www.hsaina.com

أمثلة :

$5^3 = 125$	$5^{-3} = 0{,}008$
$5^2 = 25$	$5^{-2} = 0{,}04$
$5^1 = 5$	$5^{-1} = 0{,}2$
$5^0 = 1$	$5^0 = 1$

$2018^0 = 1$; $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^0 = 1$

$1^0 = 1$; $1^1 = 1$

$1^{-36} = 1$; $1^{36} = 1$

$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$; $\sqrt{0.25} = \sqrt{0.5}^2 = 0.5$

$\sqrt{3}^5 = \sqrt{3 \times} \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{3}^2 \times \sqrt{3}^2 \times \sqrt{3} = 3 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

$3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 3^2 \times 2^4 = 9 \times 16 = 144 = 12^2$

---

[1] مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية هي : $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\dots\dots\}$

انتبه : $(a-b)^n \neq a^n - b^n$ و $(a+b)^n \neq a^n + b^n$ و $\left(a^n = b^n \Leftrightarrow a = b\right)$

$a + a + a = 3a \longrightarrow 2 + 2 + 2 = 3 \times 2 = 6$

$a \times a \times a = a^3 \longrightarrow 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$

$(4 \times 2)^2 - 3 = 64 - 3 = 61$

$-5 + 2 \times 5^2 = -5 + 50 = 45$

$(-3)^2 = -3 \times -3 = 9$

$-3^2 = -(3 \times 3) = -9$

$3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

$3\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 12\sqrt{2}^2 = 24$

$3^3 + 5^2 = 27 + 25 = 52$

$5^2 \times 2 + 4 = 25 \times 2 + 4 = 54$

II. خاصيات القوى :

a عدد حقيقي , m و n عددان صحيحان نسبيان[2] لدينا : $a^n \times a^m = a^{n+m}$

أمثلة :

$5^4 \times 5^2 = 5^{4+2} = 5^6$

$\sqrt{3}^{-2} \times \sqrt{3}^{8} = \sqrt{3}^{-2+8} = \sqrt{3}^{6}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

$\sqrt{3}^4 = \sqrt{3}^{2+2} = \sqrt{3}^2 \times \sqrt{3}^2 = 3 \times 3 = 9$

www.he

a عدد حقيقي غير منعدم,m و n عددان صحيحان نسبيان لدينا : $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

أمثلة :

$\frac{5^6}{5^4} = 5^{6-4} = 5^{2=25}$; $\frac{\sqrt{3}^6}{\sqrt{3}^{-4}} = \sqrt{3}^{6-(-4)} = \sqrt{3}^{10}$; $\frac{\sqrt{3}^{-6}}{\sqrt{3}^4} = \sqrt{3}^{-6+4} = \sqrt{3}^{-2}$

a عدد حقيقي,m و n عددان صحيحان نسبيان لدينا : $(a^m)^n = a^{m \times n}$

أمثلة :

$(3^2)^0 = 3^{2\times 0} = 3^0 = 1$

$(3^5)^2 = (3^2)^5 = 3^{10}$

$\sqrt{3}^8 = \left(\sqrt{3}^2\right)^4 = 3^4 = 81$

$\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2\times -3} = \left(\frac{1}{5}\right)^6$

---

[2] مجموعة الأعداد النسبية هي : $\mathbb{Z} = \{\ldots\ldots\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\ldots\ldots\}$

a وb عددان حقيقيان و n عدد صحيح نسبي لدينا : $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

أمثلة :

$$(3x)^2 = 3^2x^2 = 9x^2 \quad ; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 2^3 = \left(\frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}\right)^3 = 1^3 = 1$$

$$\left(2\sqrt{3}x\right)^2 = 2^2 \times \sqrt{3}^2 \times x^2 = 4 \times 3x^2 = 12x^2$$

a عدد حقيقي و b عدد حقيقي غير منعدم و n عدد صحيح نسبي لدينا : $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

أمثلة :

$$\left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)^2 = \frac{\left(3\sqrt{2}\right)^2}{5^2} = \frac{3^2\sqrt{2}^2}{5^2} = \frac{9\times2}{25} = \frac{18}{25} \quad ; \quad \frac{\left(2\sqrt{5}\right)^2}{\sqrt{5}^2} = \left(\frac{2\cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{\sqrt{5}}}\right)^2 = 2^2 = 4$$

a و b عددان حقيقيان غير منعدمان و n عدد صحيح نسبي لدينا : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

أمثلة :

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \quad ; \quad \sqrt{3}^{-2} = \frac{1}{\sqrt{3}^2} = \frac{1}{3} \quad \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5^2}{3^2} = \frac{25}{9}$$

www.hsaina.com

III. قوى العدد 10 :

n عدد صحيح طبيعي .

$$10^n = 1\underbrace{000\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots0}_{n \text{ من الأصفار}} \quad \text{و} \quad 10^{-n} = \underbrace{0{,}000\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots01}_{n \text{ من الأصفار}}$$

أمثلة :

$10^2 = 100$

$10^4 = 10000$

$10^6 = 1000000$

$0{,}1 \times 10 = 10^{-1} \times 10^1 = 10^0 = 1$

$1mille = 10^3$

$1million = 10^6$

$1billion = 10^{12}$

$10^{-2} = 0.01$

$10^{-4} = 0.0001$

$10^{-6} = 0.000001$

$10^{-3} \times 10^4 = 10^{-3+4} = 10^1 = 10$

$1milliard = 10^9$

$1trillion = 10^{18}$

$1gogol = 10^{100}$

تطبيق :

أكتب الأعداد التالية على شكل $a \times 10^n$:

120000 ; 500000000 ; $127{,}53$; $0{,}00000005$

$120000 = 12 \times 10^4$

$500000000 = 5 \times 10^8$

$127{,}53 = 12753 \times 10^2$

$0{,}00000005 = 5 \times 10^{-8}$

IV. الكتابة العلمية :

الكتابة العلمية للعدد العشري x بحيث $x = a \times 10^n$ و n عدد صحيح نسبي هي :

$1 \leq a < 10$ أو $-10 < a \leq -1$

أمثلة :

$$\begin{cases} 364\,000\,000 = 3{,}64 \times 10^8 \\ -364\,000\,000 = -3{,}64 \times 10^8 \end{cases}$$

الأس مرتبط بتحريك الفاصلة

عدد ألأرقام بين الفاصلتين هو 8

حرك الفاصلة لكي تحصل على عامل محصور بين 1و10

توجد الفاصلة الأصلية في اليمين إذن الأس سيكون موجب

$$\begin{cases} 0{,}00028 = 2{,}8 \times 10^{-4} \\ -0{,}00028 = -2{,}8 \times 10^{-4} \end{cases}$$

توجد الفاصلة الأصلية في اليسار إذن الأس سيكون سالب

إذا كانت الفاصلة الأصلية في اليمين سيكون الأس موجب أما إذا كانت في اليسار سيكون الأس سالب

تطبيق :

✓ أكتب هذا العدد بالكتابة العلمية . يبلغ قطر شعرة الإنسان حوالي 0,000017 m

الجواب هو: $0.000017m = 1{,}7 \times 10^{-5}m$

✓ يمكن للجهاز الحاسوب المتطور أن يؤدي 135 300 000 000 000 عملية في الثانية

أكتب هذا العدد بالترميز العلمي . الجواب هو : $1{,}353 \times 10^{14}$ عملية في الثانية.

3 coll

الجذور المربعة

مربعات كاملة

a	a^2
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100
11	121
12	144

$$\sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{14} < \sqrt{16}$$
$$3 < 3{,}31 < 3{,}74 < 4$$

I. جذر مربع عدد موجب :

تعريف

ليكن a عدداً حقيقياً موجباً, العدد الحقيقي الموجب الذي مربعه a يسمى الجذر المربع للعدد a ويرمز له ب $\sqrt{a}$ ويقرأ جذر مربع a بحيث :

$$\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

ملاحظات :

- $\sqrt{a}$ تكون لها معنى إذا كان a عدد حقيقي[1] موجب.
- نقول أن b بحيث $b \geq 0$ هو جذر مربع للعدد a إذا كان $b^2 = a$ مثال : 6 هو جذر مربع للعدد 36 لأن $6^2 = 36$ و لدينا $(-6)^2 = 36$ إلا أن -6 ليست جذر مربع ل 36 لأنها سالبة.
- إذا كان $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ فإن $\left(\sqrt{a}\right)^2 = \left(\sqrt{b}\right)^2$ وبالتالي $a = b$
- $\sqrt{x} = (x)^{\frac{1}{2}}$ مثال $\sqrt{81} = (81)^{\frac{1}{2}} = (81)^{0,5} = 9$

أمثلة :

$\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{2} = 1{,}41$; $\sqrt{3} = 1{,}73$; $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$

$$-\sqrt{0{,}49} = -\sqrt{0{,}7^2} = -0{,}7$$
$$\sqrt{1{,}44} = \sqrt{1{,}2^2} = 1{,}2$$
$$\frac{1}{\sqrt{81}} = \frac{1}{\sqrt{9^2}} = \frac{1}{9}$$
$$\frac{\sqrt{25}}{3} = \frac{\sqrt{5^2}}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$$
$$\sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$$
$$\sqrt{\frac{25}{100}} = \sqrt{\left(\frac{5}{10}\right)^2} = \frac{5}{10}$$
$$\sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{\sqrt{9^2}} = \sqrt{9} = 3$$

انتبه :

- ✓ $\sqrt{-5}$ لا معنى لها لأن مابداخل الجذر يجب أن يكون موجباً.
- ✓ $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{7^2} = 7$ لأن الأس زوجي وبالتالي $(-7)^2 = -7 \times -7 = 49 = 7^2$
- ✓ $\left(-\sqrt{7}\right)^2 = -\sqrt{7} \times -\sqrt{7} = \sqrt{7}^2 = 7$ و $-\sqrt{7}^2 = -7$
- ✓ $\sqrt{3}^8 = \sqrt{3}^{2\times4} = \left(\sqrt{3}^2\right)^4 = 3^4 = 81$ لتخلص من الجذر نقسم الأس على 2
- ✓ $\left(2\sqrt{5}\right)^2 = 2^2 \times \sqrt{5}^2 = 4 \times 5 = 20$ و $\sqrt{4 + \sqrt{5}^2} = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$

[1] مجموعة الأعداد الحقيقية هي $\mathbb{R}$ وتضم جميع أعداد القياسات سواء كانت موجبة أو سالبة .

www.hsalim.com

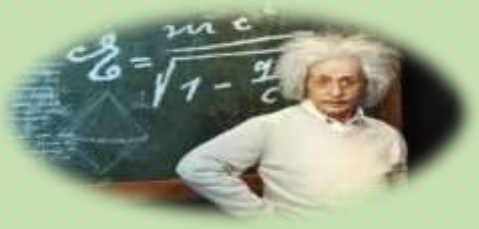
II. العمليات على الجذور المربعة :

خاصية 1

a و b و c أعداد حقيقية موجبة : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

$$\sqrt{a \times b \times c \times d} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c} \times \sqrt{d}$$

أمثلة :



$$\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{3 \times 5} = \sqrt{15}$$
$$\sqrt{9 \times 4} = \sqrt{9} \times \sqrt{4} = 3 \times 2 = 6$$
$$\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{12 \times 3} = \sqrt{36} = 6$$
$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{6} = \sqrt{2 \times 3 \times 6} = \sqrt{36} = 6$$
$$\sqrt{900} = \sqrt{9 \times 100} = \sqrt{9} \times \sqrt{100} = 3 \times 10 = 30$$
$$\sqrt{4900} = \sqrt{49 \times 100} = \sqrt{49} \times \sqrt{100} = 7 \times 10 = 70$$

خاصية 2

a و b عدادان حقيقيان موجبان : $\sqrt{a^2 \times b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = a\sqrt{b}$

www.hsaina.c

أمثلة :

$$-\sqrt{45} = -\sqrt{9 \times 5} = -\sqrt{9} \times \sqrt{5} = -3\sqrt{5}$$
$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{5^2 \times 2} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$
$$3\sqrt{20} = 3\sqrt{4 \times 5} = 3\sqrt{4} \times \sqrt{5} = 3 \times 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$
$$\sqrt{5^2 \times 2^2 \times 3} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{3} = 5 \times 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$
$$\sqrt{180} = \sqrt{9 \times 2 \times 2 \times 5} = \sqrt{9 \times 4 \times 5}$$
$$= \sqrt{9} \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

انتبه :

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$
$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$
$$\sqrt{a \times b} \neq \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} - \sqrt{7} = \sqrt{3}^4 - \sqrt{7} = \left(\sqrt{3}^2\right)^2 - \sqrt{7} = 3^2 - \sqrt{7} = 9 - \sqrt{7}$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{7} = 4\sqrt{3} - \sqrt{7} \quad ; \quad \sqrt{5} \times 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{5 \times 3} = 2\sqrt{15}$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{5} = 2\sqrt{3} + \sqrt{5} \quad ; \quad \sqrt{25} + \sqrt{9} = \cancel{\sqrt{25 + 9}} = 5 + 3 = 8$$

$$\sqrt{9 + 16} = \cancel{\sqrt{9} + \sqrt{16}} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{7} \times \sqrt{2} - \sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{14} - \sqrt{36} = \sqrt{14} - 6$$

خاصية 3

a و b عداداان حقيقيان موجبان و $b \neq 0$: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

أمثلة :

$$\frac{-\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = -\sqrt{\frac{12}{3}} = -\sqrt{\frac{4\times\cancel{3}}{\cancel{3}}} = -\sqrt{4} = -2$$

$$2\sqrt{\frac{5}{4}} = 2\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \cancel{2}\times\frac{\sqrt{5}}{\cancel{2}} = \sqrt{5}$$

$$\frac{\sqrt{55}}{\sqrt{45}} = \sqrt{\frac{5\times11}{5\times9}} = \sqrt{\frac{11}{9}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{11}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{500}}{\sqrt{35}} = \sqrt{\frac{500}{35}} = \sqrt{\frac{5\times100}{5\times7}} = \sqrt{\frac{100}{7}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{7}} = \frac{10}{\sqrt{7}}$$

III. حذف الجذر من المقام :

1. المقام لايحتوي على مجموع أو فرق :

a و b عداداان حقيقيان موجبان و $b \neq 0$: $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$

أمثلة :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{-5}{\sqrt{5}} = \frac{-5}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{-5\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2} = \frac{-5\sqrt{5}}{5} = -\sqrt{5}$$

$$\frac{-2}{5\sqrt{3}} = \frac{-2}{5\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}^2} = \frac{-2\sqrt{3}}{15}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{3\times5}}{\sqrt{5}^2} = \frac{2\sqrt{15}}{5}$$

$$\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{5}^2} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}-2)}{5}$$

$$\frac{3+\sqrt{2}}{4\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{2}}{4\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(3+\sqrt{2})}{4\sqrt{5}^2} = \frac{\sqrt{5}(3+\sqrt{2})}{4\times5} = \frac{\sqrt{5}(3+\sqrt{2})}{20}$$

2. المقام يحتوي على مجموع أو فرق :

مفهوم المرافق :

مرافق $a+b$ هو $a-b$ | مرافق $-a+b$ هو $-a-b$

مرافق $a-b$ هو $a+b$ | مرافق $-a-b$ هو $-a+b$

أمثلة :

العدد a	مرافقه b	الجداء $a \times b$
$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 2^2-\sqrt{3}^2 = 4-3 = 1$
$5-\sqrt{5}$	$5+\sqrt{5}$	$(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5}) = 5^2-\sqrt{5}^2 = 25-5 = 20$
$-3+\sqrt{2}$	$-3-\sqrt{2}$	$(-3+\sqrt{2})(-3-\sqrt{2}) = (-3)^2-\sqrt{2}^2 = 9-2 = 7$
$\sqrt{5}+\sqrt{2}$	$\sqrt{5}-\sqrt{2}$	$(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2}) = \sqrt{5}^2-\sqrt{2}^2 = 5-2 = 3$
$-2\sqrt{3}+4$	$-2\sqrt{3}-4$	$(-2\sqrt{3}+4)(-2\sqrt{3}-4) = (-2\sqrt{3})^2-4^2 = 12-16 = -4$

a و b عداداً حقيقيان موجبان قطعاً و c عدد حقيقي :

$$\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{c\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

www.hsai

أمثلة :

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{1\times(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\underbrace{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}^2-\sqrt{3}^2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} = -(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = -\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

المتطابقة رقم3

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}\times(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{\sqrt{7}^2-\sqrt{6}^2} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{7-6}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{1} = 2\sqrt{3}(\sqrt{7}+\sqrt{6})$$

$$\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{\sqrt{7}^2-\sqrt{5}^2} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{2} = \sqrt{7}+\sqrt{5}$$

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}{2^2-5^2} = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}{4-25} = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}{-21}$$

IV. حل المعادلة $x^2 = a$ في $\mathbb{R}$:

الحالة 1 : $x^2 = a$ بحيث $a = 0$ المعادلة تقبل حلاً وحيداً هو $x = 0$

- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $2(x^2 + 3) = 6$

$$\mathbf{2(x^2 + 3) = 6} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 3 = \frac{6}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 3 = 3$$

$$x^2 = 3 - 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$ إذن المعادلة تقبل حلاً وحيداً هو 0

الحالة 2 : $x^2 = a$ بحيث $a > 0$ المعادلة تقبل حلين هما $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$

- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2 = 9$

$$\mathbf{x^2 = 9} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3^2 = 0$$

$$(x - 3)(x + 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 3 = 0 \text{ أو } x + 3 = 0$$

إذن المعادلة تقبل حلين هما 3 و -3 $\quad x = 3$ أو $x = -3$

www.hsaina.com

- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $2x^2 = 10$

$$\mathbf{2x^2 = 10} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{10}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 5 = 0$$

$$x^2 - \sqrt{5}^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$$

$$x - \sqrt{5} = 0 \text{ أو } x + \sqrt{5} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{5} \text{ أو } x = -\sqrt{5}$$

إذن المعادلة تقبل حلين هما $\sqrt{5}$ و $-\sqrt{5}$

الحالة 3 : $x^2 = a$ بحيث $a < 0$ المعادلة لا تقبل حل .

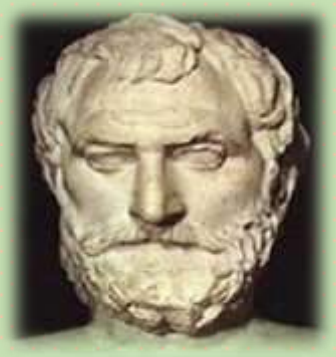
- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2 + 12 = 2$

$$\mathbf{x^2 + 12 = 2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 2 - 12 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -10$$

إذن المعادلة لا تقبل حل لأن x^2 يكون دائماً موجباً أو منعدماً $x^2 \geq 0$

3 coll

مبرهنة طاليس

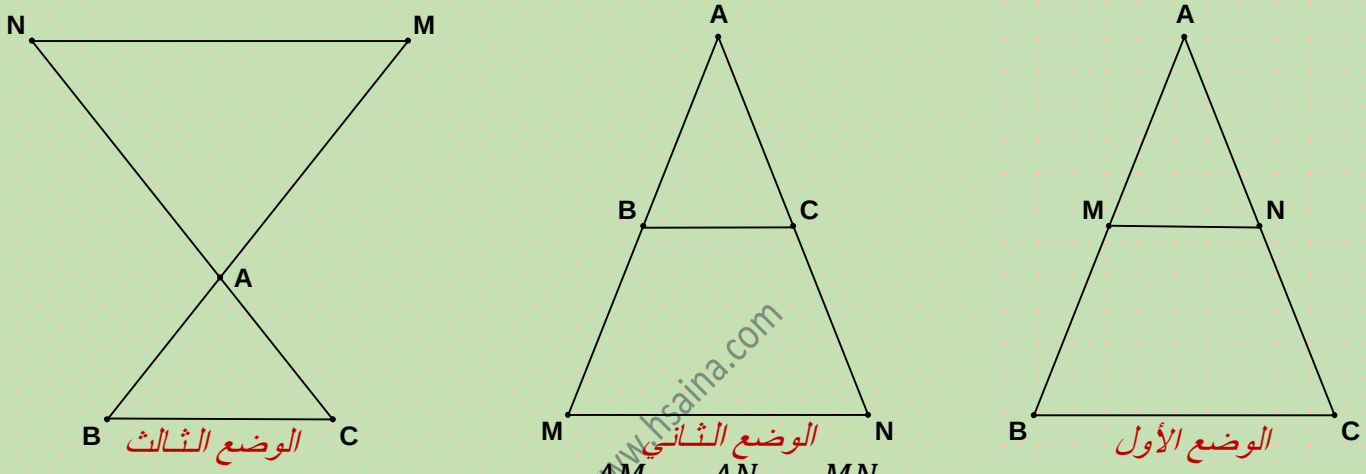


مقدمة :

طـــاليس Thalès هو فيلسوف ورياضي يوناني ,ولد في ميليتس من عائلة فنيقية .وهو أول الحكماء السبعة لدى الأغـريـق. آشتهر بإكتشافاته الهندسية. توفي نحو 548 قبل الميلاد . تستعمل نظريته للبرهنة على التوازي ولقياس الأطوال والمسافات الكبيرة كطول برج إيـفـل وطول الـهـرم المصري وذلك بإستخدام قياسات غير مباشرة .

I. مبرهنة طاليس المباشرة :

نعتبر الأشكال التالية بحيث : $(MN)//(BC)$ والنقط A و B و M في نفس ترتيب النقط A و C و N



www.hsaina.com

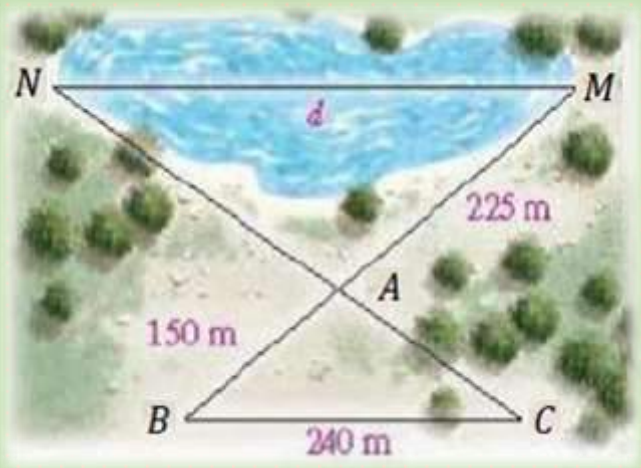
في كـــل وضـع لـــديـنـــا : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

خاصية

ABC مثلث و M نقطة من المستقيم (AB) و N نقطة من المستقيم (AC).

إذا كان $(MN)//(BC)$ فإن : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

مثال : نعتبر الشكل التالي بحيث : $(MN)//(BC)$



1) أوجد d طول البركة ؟

2) إذا كان $AN = 255\ m$, فأوجد AC ؟

الحـــل : 1) لدينا $(MN)//(BC)$ و $\begin{cases} A \in [BM] \\ A \in [NC] \end{cases}$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة فإن :

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ إذن $\frac{225}{150} = \frac{MN}{240}$

إذن $MN \times 150 = 225 \times 240$ إذن $MN = \frac{225 \times 240}{150} = 360$ وبالتالي $d = 360\ m$

2) لدينا $(MN)//(BC)$ و $\begin{cases} A\in [NC] \\ A\in [BM] \end{cases}$ إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة فإن : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

إذن $\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$ إذن $\frac{255}{AC}=\frac{360}{240}$ إذن $AC\times 360=255\times 240$

إذن $AC=\frac{255\times 240}{360}=170\,m$ وبالتالي $AC=170\,m$

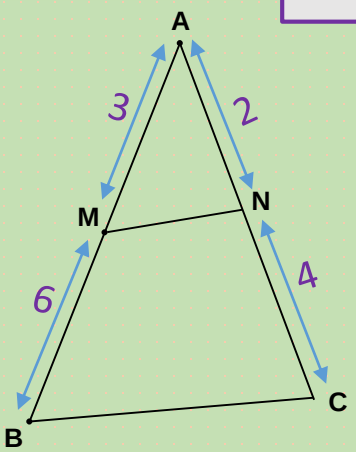
ملاحظة :

✓ تستعمل خاصية طاليس المباشرة لحساب الأطوال .

II. مبرهنة طاليس العكسية :

خاصية

ABC مثلث و M نقطة من المستقيم (AB) و N نقطة من المستقيم (AC).
إذا كان : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ والنقط المستقيمية A و M و B في نفس ترتيب النقط المستقيمية A و N و C فإن : $(MN)//(BC)$



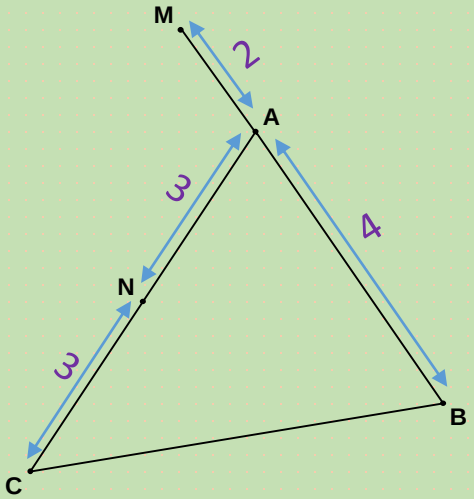
مثال 1: هل (MN) يوازي (BC) ؟

في المثلث ABC لدينا $M\in(AB)$ و $N\in(AC)$

$\begin{cases} \frac{AM}{AB}=\frac{3}{3+6}=\frac{3}{9}=\frac{3\times 1}{3\times 3}=\frac{1}{3} \\ \frac{AN}{AC}=\frac{2}{2+4}=\frac{2}{6}=\frac{2\times 1}{2\times 3}=\frac{1}{3} \end{cases}$ إذن $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{1}{3}$

www.hsina.com

وبما أن النقط المستقيمية A و M و B في نفس ترتيب النقط المستقيمية A و N و C إذن حسب مبرهنة طاليس العكسية فإن : $(MN)//(BC)$



مثال 2: هل (MN) يوازي (BC) ؟

في المثلث ABC لدينا $M\in(AB)$ و $N\in(AC)$

لدينا $\begin{cases} \frac{AM}{AB}=\frac{2}{4}=\frac{2\times 1}{2\times 2}=\frac{1}{2} \\ \frac{AN}{AC}=\frac{3}{6}=\frac{3\times 1}{3\times 2}=\frac{1}{2} \end{cases}$ إذن $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{1}{2}$

إذن لدينا $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ ومع ذلك (MN) لا يوازي (BC)

لأن النقط المستقيمية A و M و B ليست في نفس الترتيب مع النقط المستقيمية A و N و C .

ملاحظة :

✓ تستعمل خاصية طاليس العكسية للبرهنة على التوازي .

3 coll

الترتيب والعمليات

I. مقارنة عددين حقيقين :

خاصية

لمقارنة عددين حقيقين a و b نحدد إشارة فرقهما:

✓ إذا كان $a - b \geq 0$ فإن $a \geq b$

✓ إذا كان $a - b \leq 0$ فإن $a \leq b$

مثال :

لنقارن $\frac{3}{5}$ و $\frac{1}{2}$: إذن نحسب فرقهما $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3\times2-1\times5}{5\times2} = \frac{6-5}{10} = \frac{1}{10}$

وبما أن $\frac{1}{10} \geq 0$ لأنها موجبة إذن $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} \geq 0$ وبالتالي $\frac{3}{5} \geq \frac{1}{2}$

II. الترتيب والعمليات :

1. الترتيب والجمع والفرق:

hsaina.com

خاصية 1

a و b و c أعداد حقيقية :

✓ إذا كان $a \leq b$ فإن $a + c \leq b + c$ والعكس صحيح

✓ إذا كان $a - c \leq b - c$ فإن $a \leq b$ والعكس صحيح

أمثلة :

1- لنقارن $3 + \sqrt{5}$ و $1 + \sqrt{5}$

لدينا $1 \leq 3$ إذن $1 + \sqrt{5} \leq 3 + \sqrt{5}$

2- a و b عددان حقيقيان بحيث $a \leq b$

لنقارن $a - 2\sqrt{3}$ و $b - 2\sqrt{3}$:

لدينا $a \leq b$ إذن $a - 2\sqrt{3} \leq b - 2\sqrt{3}$

خاصية 2

a و b و c أعداد حقيقية :

✓ إذا كان $a \leq b$ و $c \leq d$ فإن $a + c \leq b + d$

مثال : لدينا $a \leq 5$ و $3 \geq b$ لنبين أن $a + b \leq 8$

لدينا $a \leq 5$ و $b \leq 3$ إذن $a + b \leq 5 + 3$ وبالتالي $a + b \leq 8$

2. الترتيب والضرب :

خاصية

a و b و k أعداد حقيقية :

✓ إذا كان $a \leq b$ و $k > 0$ فإن $a \times k \leq b \times k$

✓ إذا كان $a \leq b$ و $k < 0$ فإن $a \times k \geq b \times k$

أمثلة :

لدينا $2 \leq 5$ إذن $3 \times 2 \leq 3 \times 5$ وبالتالي $6 \leq 15$

لدينا $2 \leq 5$ إذن $-3 \times 2 \geq -3 \times 5$ وبالتالي $-6 \geq -15$

3. الترتيب والمقلوب :

خاصية

a و b عددان حقيقيان موجبان قطعاً :

✓ إذا كان $a \leq b$ فإن $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

✓ إذا كان $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$ فإن $a \geq b$

➢ لدينا $2 \leq 4$ إذن $\frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}$

➢ لدينا $\frac{1}{5\sqrt{2}} \geq \frac{1}{2\sqrt{5}}$ إذن $5\sqrt{2} \leq 2\sqrt{5}$

www.hsaina.

4. خاصيات أخرى :

خاصية

a و b عددان حقيقيان موجبان :

✓ إذا كان $a \leq b$ فإن $a^2 \leq b^2$

✓ إذا كان $a \leq b$ فإن $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

ملاحظة : إذا كان a و b سالبان فإنه إذا كان $a \leq b$ فإن $a^2 \geq b^2$

أمثلة :

➢ لنقارن $2\sqrt{5}$ و $3\sqrt{2}$: لدينا $(3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$ و $(2\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20$

وبما أن $18 < 20$ إذن $(3\sqrt{2})^2 < (2\sqrt{5})^2$ وبالتالي $3\sqrt{2} < 2\sqrt{5}$

➢ لنقارن $-2\sqrt{2}$ و -3 : لدينا $(2\sqrt{2})^2 = 4 \times 2 = 8$ و $3^2 = 9$

لدينا $8 < 9$ إذن $(2\sqrt{2})^2 < 3^2$ إذن $2\sqrt{2} < 3$ وبالتالي $-2\sqrt{2} > -3$

III. التأطير :

تعريف

a و b و x أعداد حقيقية بحيث $a \leq b$:
الكتابة $a \leq x \leq b$ تسمى تأطيراً للعدد x

1. تأطير مجموع :

نعتبر جميع الأعداد حقيقية :
إذا كان $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ فإن $a + c \leq x + y \leq b + d$

أمثلة :

- x و y عددان حقيقيان بحيث : $2 \leq x \leq 5$ و $-3 \leq y \leq -1$ أطر $x + y$:

لدينا $2 + (-3) \leq x + y \leq 5 + (-1)$ إذن $2 - 3 \leq x + y \leq 5 - 1$

وبالتالي $-1 \leq x + y \leq 4$

- a و b عددان حقيقيان بحيث : $1 \leq a \leq 6$ و $-4 \leq a \leq 10$ أطر $a + b$:

لدينا $1 + (-4) \leq a + b \leq 6 + 10$ إذن $-3 \leq a + b \leq 16$

www.hsaina.com

2. تأطير فرق :

نعتبر جميع الأعداد حقيقية :
إذا كان $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ فإن $a - d \leq x + y \leq b - c$

مثال 1 : x و y عددان حقيقيان بحيث : $2 \leq x \leq 5$ و $1 \leq y \leq 6$

أطر $x - y$: أولاً نأطر $-y$ $\begin{cases} 1 \leq y \leq 6 \\ -6 \leq -y \leq -1 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ -6 \leq -y \leq -1 \end{cases}$

إذن $2 - 6 \leq x - y \leq 5 - 1$ وبالتالي $-4 \leq x - y \leq 4$

مثال 2 : a و b عددان حقيقيان بحيث : $1 \leq a \leq 3$ و $-7 \leq b \leq -2$

أطر $a - b$: أولاً نأطر $-b$ لدينا $\begin{cases} -7 \leq b \leq -2 \\ 2 \leq -b \leq 7 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} 1 \leq a \leq 3 \\ 2 \leq -b \leq 7 \end{cases}$

إذن $1 + 2 \leq a - b \leq 3 + 7$ وبالتالي $3 \leq a - b \leq 10$

3. تأطير جداء :

الحالة 1

نعتبر جميع الأعداد حقيقية موجبة : إذا كان $\begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases}$

فإن $a \times c \le x \times y \le b \times d$

مثال : x و y عددان حقيقيان بحيث : $2 \le x \le 5$ و $1 \le y \le 3$ أطر $x \times y$:

لدينا $\begin{cases} 2 \le x \le 5 \\ 1 \le y \le 3 \end{cases}$ إذن $2 \times 1 \le x \times y \le 5 \times 3$ إذن $2 \le xy \le 15$

الحالة 2

a و b عددان حقيقيان موجبان و c و d عددان حقيقيان سالبان :

إذا كان $\begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases}$ فإن $b \times c \le x \times y \le a \times d$

مثال : x و y عددان حقيقيان بحيث : $3 \le x \le 7$ و $-5 \le y \le -2$ أطر xy :

أولاً يجب أن تكون في حالة الضرب الأعداد المؤطرة ل y موجبة إذن : $\begin{cases} -5 \le y \le -2 \\ -(-2) \le -y \le -(-5) \end{cases}$

إذن أصبحت جميع الأعداد المؤطرة ل x و y موجبة : $\begin{cases} 3 \le x \le 7 \\ 2 \le -y \le 5 \end{cases}$

إذن $3 \times 2 \le x \times (-y) \le 7 \times 5$ إذن $6 \le -xy \le 35$ ولكن مطلوب منا أن نأطر xy

وليس $-xy$ إذن يجب أن نتخلص من إشارة – كما يلي : $\begin{cases} 6 \le -xy \le 35 \\ -35 \le -(-xy) \le -6 \end{cases}$

وبالتالي $-35 \le xy \le -6$

لا تنسى عندما نضرب أطراف متفاوتة في إشارة سالبة نقلب الترتيب

4. تأطير مقلوب :

x و a و b أعداد حقيقية بحيث $a \le x \le b$

تكافئ $\frac{1}{b} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{a}$

مثال : لدينا $2 \le x \le 4$ إذن $\frac{1}{4} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{2}$

5. تأطير خارج :

الحالة 1

نعتبر جميع الأعداد حقيقية موجبة : إذا كان $\begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases}$

فإن $\frac{a}{d} \le \frac{x}{y} \le \frac{b}{c}$ بحيث $y \ne 0$ و $c \ne 0$ و $d \ne 0$

www.hsaina.com

مثال : x و y عددان حقيقيان بحيث : $6 \le x \le 10$ و $2 \le y \le 3$ أطر $\frac{x}{y}$:

لدينا $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$ إذن نأطر أولاً $\frac{1}{y}$: لدينا $\begin{cases} 2 \le y \le 3 \\ \frac{1}{3} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{2} \end{cases}$ إذن $\begin{cases} 6 \le x \le 10 \\ \frac{1}{3} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{2} \end{cases}$ إذن

لاحظ أن جميع الأعداد المؤطرة ل x و $\frac{1}{y}$ هي موجبة إذن سنقوم بعملية الضرب بدون قلب الترتيب

$6 \times \frac{1}{3} \le x \times \frac{1}{y} \le 10 \times \frac{1}{2}$ إذن $\frac{6}{3} \le \frac{x}{y} \le \frac{10}{2}$ وبالتالي $2 \le \frac{x}{y} \le 5$

الحالة 2

a و b عددان حقيقيان موجبان و c و d عددان حقيقيان سالبان :

إذا كان $\begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases}$ فإن $\frac{b}{d} \le \frac{x}{y} \le \frac{a}{c}$ بحيث $y \ne 0$ و $c \ne 0$ و $d \ne 0$

مثال : x و y عددان حقيقيان بحيث : $6 \le x \le 10$ و $-3 \le y \le -2$ أطر $\frac{x}{y}$:

لدينا $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$ إذن نأطر أولاً $\frac{1}{y}$: لدينا $\begin{cases} -3 \le y \le -2 \\ \frac{1}{-2} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{-3} \end{cases}$ إذن تانياً نأطر $x \times \frac{1}{y}$ لكن

لاحظ أن الأعداد المؤطرة ل $\frac{1}{y}$ سالبة إذن نحولها إلى أعداد موجبة كما يلي $\begin{cases} \frac{1}{-2} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{-3} \\ \frac{1}{3} \le -\frac{1}{y} \le \frac{1}{2} \end{cases}$

إذن $\begin{cases} 6 \le x \le 10 \\ \frac{1}{3} \le -\frac{1}{y} \le \frac{1}{2} \end{cases}$ إذن جميع الأعداد المؤطرة ل x و $-\frac{1}{y}$ هي موجبة إذن سنقوم بعملية

الضرب $6 \times \frac{1}{3} \le x \times \left(-\frac{1}{y}\right) \le 10 \times \frac{1}{2}$ إذن $\frac{6}{3} \le -\frac{x}{y} \le \frac{10}{2}$ إذن $2 \le -\frac{x}{y} \le 5$ ولكن

طُلِبَ منا أن نأطر $\frac{x}{y}$ وليس $-\frac{x}{y}$ إذن يجب أن نتخلص من إشارة - كما يلي : $-5 \le -\left(-\frac{x}{y}\right) \le -2$

وبالتالي $-5 \le \frac{x}{y} \le -2$

www.hsaina.com

3 coll

مبرهنة فيثاغورس

مقدمة :

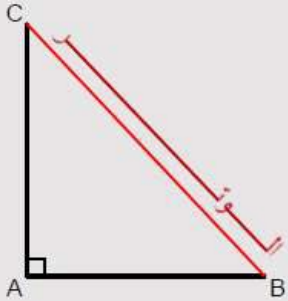
فيثاغورس Pythagore هو فيلسوف ورياضي يوناني عاش في القرن السادس قبل الميلاد , وتستخدم نظريته لإيجاد مسافات من دون قياس ولإثبات التعامد .

I. مبرهنة فيثاغورس المباشرة :

خاصية 1

إذا كان ABC مثلث قائم الزاوية في A فإن :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$



مثال :

ABC مثلث قائم الزاوية في A بحيث : $AB = 3\,cm$ $\quad BC = 5\,cm$

أحـــســـب AC

www.hsaina.com

الحـــل : بما أن المثلث ABC قائم الزاوية في A .

إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة فإن :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$5^2 = 3^2 + AC^2$$
$$5^2 - 3^2 = AC^2$$
$$AC^2 = 25 - 9$$

$$AC^2 = 16$$
$$\sqrt{AC^2} = \sqrt{16}$$
$$AC = \sqrt{4^2}$$

وبالتالي $AC = 4\,cm$

ملاحظة :

- ✓ تستعمل خاصية فيثاغورس المباشرة فقط إذا كان المثلث قائم الزاوية .
- ✓ تستعمل خاصية فيثاغورس المباشرة لحساب الأطوال والمسافات .
- ✓ الوتر هو أكبر ضلع في المثلث القائم الزاوية .

II. مبرهنة فيثاغورس العكسية :

خاصية

إذا كان ABC مثلثاً بحيث $BC^2 = AB^2 + AC^2$

فإن المثلث ABC قائم الزاوية في A .

مثال :

ABC مثلث بحيث : $AB = 3$ و $AC = 4$ و $BC = 5$

بين أن المثلث ABC قائم الزاوية .

الحـــل : أولاً نبحث عن الوتر أكبر ضلع.

الوتر هو $BC = 5$ إذن : $BC^2 = 5^2 = 25$

ولدينا $AB^2 + AC^2 = 3 + 4 = 9 + 16$

نلاحظ أن $25 = 9 + 16$

إذن $BC^2 = AB^2 + AC^2$

إذن حسب مبرهنة فيتاغورس العكسية فإن المثلث ABC قائم الزاوية في A .

ملاحظة :

✓ تستعمل خاصية فيتاغورس العكسية للبرهنة على أن المثلث قائم الزاوية ولإثبات التعامد .

www.hsaina.com

3 coll

الحساب المثلثي

مقدمة :

المصريون القدامى هم أول من استخدم الحساب المثلثي لبناء الأهرامات والمعابد الفرعونية ولدراسة الفلك وحساب المسافات الجغرافية وقياس زوايا الإرتفاع والإنخفاض .

I. النسب المثلثية لزاوية حادة :

تعريف

في مثلث ABC قائم الزاوية في A ،النسب المثلثية للزاوية $A\hat{C}B$ هي :

✓ النسبة $\frac{AB}{BC}$ تسمى جيب الزاوية $A\hat{C}B$ ونرمز لها ب $\sin A\hat{C}B$

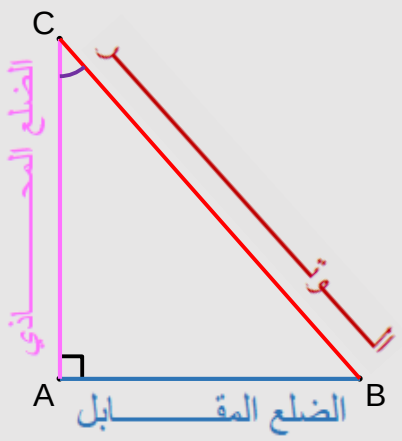
بتعبير آخر $\sin A\hat{C}B = \frac{\text{الضلع المقابل لِ } \hat{C}}{\text{الوتـــــــــر}} = \frac{AB}{BC}$

✓ النسبة $\frac{AC}{BC}$ تسمى جيب تمام الزاوية $A\hat{C}B$ ونرمز لها ب $\cos A\hat{C}B$

بتعبير آخر $\cos A\hat{C}B = \frac{\text{الضلع المحاذي لِ } \hat{C}}{\text{الوتـــــــــر}} = \frac{AC}{BC}$

✓ النسبة $\frac{AB}{AC}$ تسمى ظل الزاوية $A\hat{C}B$ ونرمز لها ب $\tan A\hat{C}B$

بتعبير آخر $\tan A\hat{C}B = \frac{\text{الضلع المقابل لِ } \hat{C}}{\text{الضلع المحاذي لِ } \hat{C}} = \frac{AB}{AC}$

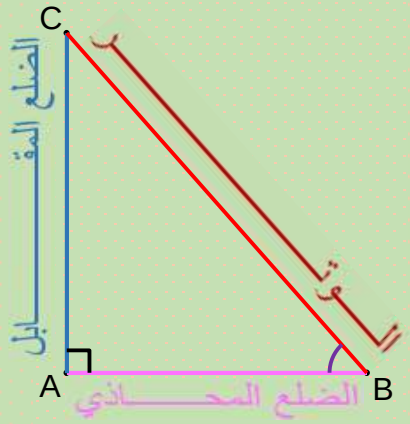


مثال :

ABC مثلث قائم الزاوية في A بحيث :

$AB = 3\ cm$ و $AC = 4\ cm$ و $BC = 5\ cm$

أحسب النسب المثلثية للزاوية $A\hat{B}C$:



أ- لنحسب $\sin A\hat{B}C$:

$$\sin A\hat{B}C = \frac{\text{الضلع المقابل لِ } \hat{B}}{\text{الوتـــــــــر}} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5} = 0,8$$

ب-لنحسب $\cos A\hat{B}C$:

$$\cos A\hat{B}C = \frac{\text{الضلع المحاذي لِ } \hat{B}}{\text{الوتـــــــــر}} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} = 0,6$$

ت-لنحسب $\tan A\hat{B}C$:

$$\tan A\hat{B}C = \frac{\text{الضلع المقابل لِ } \hat{B}}{\text{الضلع المحاذي لِ } \hat{B}} = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{3} = 1,33$$

www.hsaina.com

ملاحظة :

☆ الوتر هو أكبر ضلع في المثلث القائم الزاوية ويكون مقابل للزاوية القائمة .

☆ إذا كان α قياس زاوية حادة $(0° < \alpha < 90°)$ فإن :

$0 < \sin\alpha < 1$ و $0 < \cos\alpha < 1$ لاحظ ذلك في المثال (أ) و (ب) أعلاه

II. علا قات بين النسب المثلثية لزاوية حادة :

خاصية 1

إذا كان α قياس زاوية حادة فإن :

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{و} \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

مثال :

α قياس زاوية حادة بحيث : $\cos\alpha = \frac{2}{3}$

أحسب $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$

❖ لنحسب $\sin\alpha$:

نعلم أن $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

إذن $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9}$$

$$= \frac{9-4}{9} = \frac{5}{9}$$

إذن $\sin^2\alpha = \frac{5}{9}$

$\sqrt{\sin^2\alpha} = \sqrt{\frac{5}{9}}$ وبالتالي $\sin\alpha = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

وبما أن $0 < \sin\alpha < 1$
إذن يمكن أن ندخل الجذر
عليها من أجل التخلص
من المربع لأنها موجبة

❖ لنحسب $\cos\alpha$:

نعلم أن $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

إذن $\tan\alpha = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

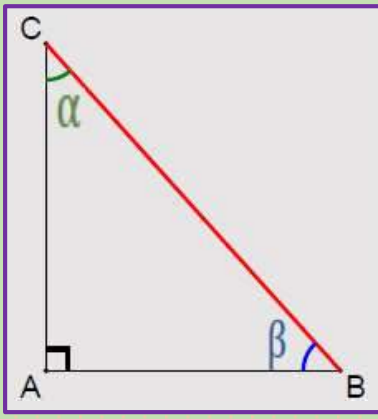
وبالتالي $\tan\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$

www.hsaina.com

خاصية 2

إذا كان α و β قياسي زاويتين حادتين متتامتين أي $\alpha + \beta = 90°$ فإن :

$$\begin{cases} \sin\alpha = \cos\beta \\ \sin\beta = \cos\alpha \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{1}{\tan\beta} \\ \tan\beta = \dfrac{1}{\tan\alpha} \end{cases}$$



www.hsaina.com

أمثلة :

$\sin 70° = \cos 20°$

$\cos 30° = \sin 60°$

$\sin 80° = \cos 10°$

$\cos 45° = \sin 45°$

$\tan 15° = \dfrac{1}{\tan 75°}$

$\tan 11° = \dfrac{1}{\tan 79°}$

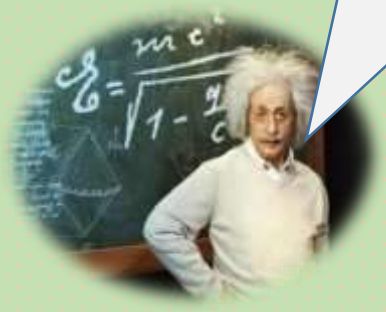
أحسب مايلي : $A = \cos^2 30° + \cos 10° + \tan 20° \times \tan 70° + \sin^2 60° - \sin 80°$

لإيجاد الزاوية α بحيث $\sin\alpha = 1$

باستخدام الآلة الحاسبة إضغط بالترتيب على

shift ثم Sins ثم 1

لتشاهد على الشاشة 90°



III. جدول النسب المثلثية لزوايا خاصة :

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معروف

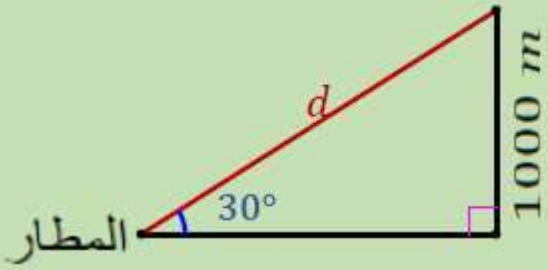
تطبيق : إذا كنت تسكن بالقرب من المطار وشاهدت طائرة تحلق على ارتفاع $1000m$ وقمت بتقدير زاوية إرتفاعها فكانت 30° .

أحسب d مسافة بعد الطائرة عن مكان الهبوط ؟

الحـــــل : لدينا $\sin 30° = \dfrac{1000}{d}$

إذن $d = \dfrac{1000}{\sin 30°} = \dfrac{1000}{\frac{1}{2}} = 1000 \times \dfrac{2}{1}$

وبالتالي $d = 2000m = 2\ km$



3 coll

الزوايا المحيطية والزوايا المركزية

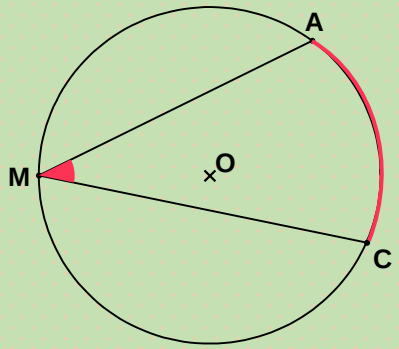
1- الزوايا المحيطية :

تعريف

الزاوية المحيطية هي كل زاوية ينتمي رأسها إلى دائرة وتحصر قوساً في هذه الدائرة .

مثال :

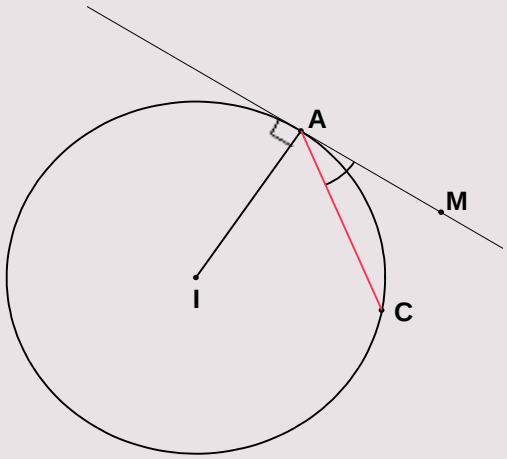
$A\widehat{M}C$ زاوية محيطية تحصر القوس $\widehat{AC}$



حالة خاصة :

المستقيم (AM) مماس للدائرة في النقطة A .

إذن الزاوية $M\hat{A}C$ زاوية محيطية تحصر القوس $\widehat{AC}$



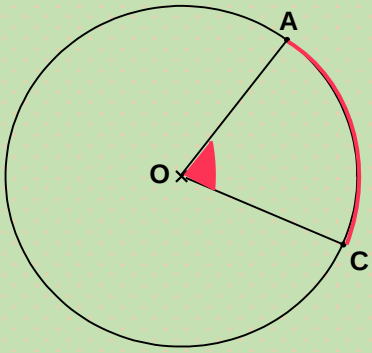
2- الزوايا المركزية :

خاصية

الزاوية المركزية هي كل زاوية رأسها هو مركز الدائرة وتحصر قوساً في هذه الدائرة .

مثال :

$A\hat{O}C$ زاوية مركزية تحصر القوس $\widehat{AC}$



3- مقارنة زاويتين محيطيتين :

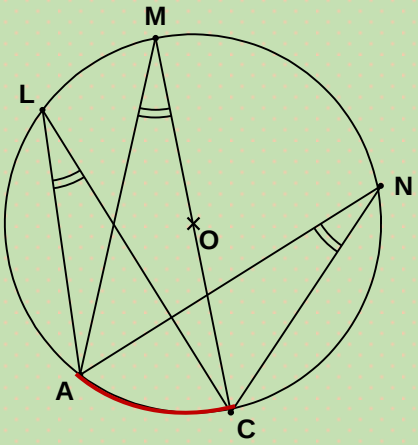
خاصية

الزاويا المحيطية التي تحصر نفس القوس تكون متقايسة.

مثال :

الزوايا $A\hat{L}C$ و $A\widehat{M}C$ و $A\widehat{N}C$ محيطية

وتحصر نفس القوس $\widehat{AC}$ إذن فهي متقايسة .

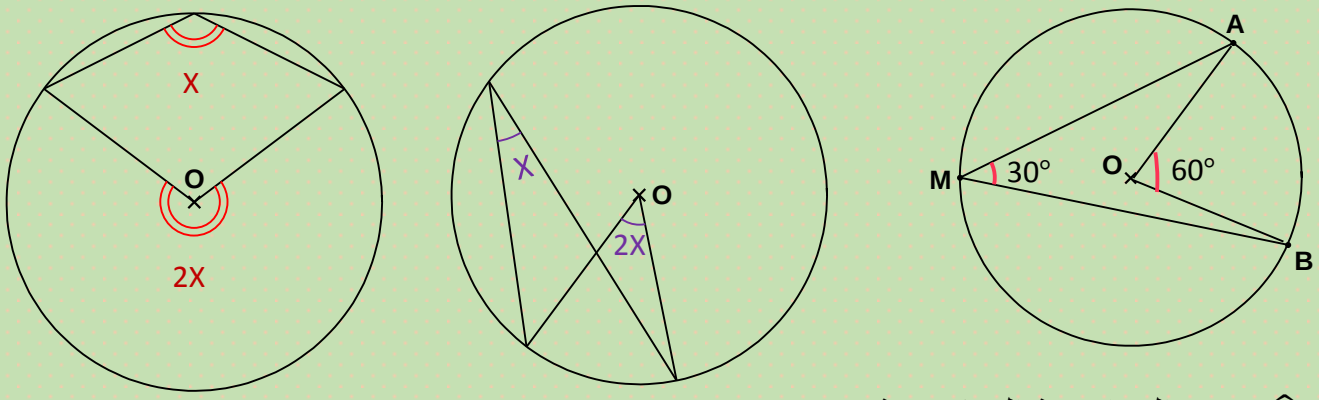


www.hsaina.com

4- مقارنة زاوية محيطية وزاوية مركزية :

خاصية

قياس الزاويا المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المرتبطة بها.

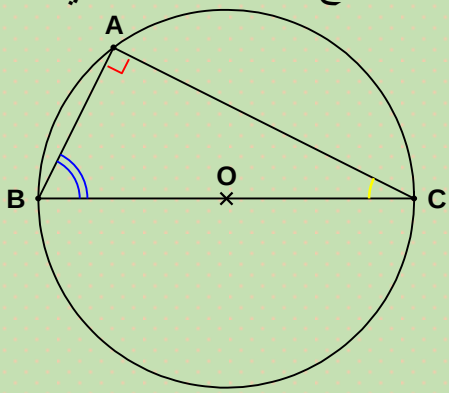


$A\hat{O}B$ هي الـزاويـــة المركزيـــة

المرتبطة بالزاوية المحيطية $A\hat{M}B$ إذن $A\hat{O}B = 2\,A\hat{M}B$ إذن $A\hat{O}B = 60°$

تذكير بخاصيات مهمة :

❖ مجموع زوايا مثلث يساوي $180°$

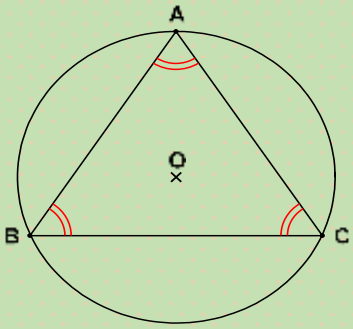


$A\hat{B}C + B\hat{C}A + B\hat{A}C = 180°$

❖ الزاوية المستقيمية $B\hat{O}C = 180°$

❖ إذا كان المثلث ABC محاط بدائرة قطرها $[BC]$ ومركزها O فإن المثلث ABC قائم الزاوية في A ومنه $B\hat{A}C = 90°$

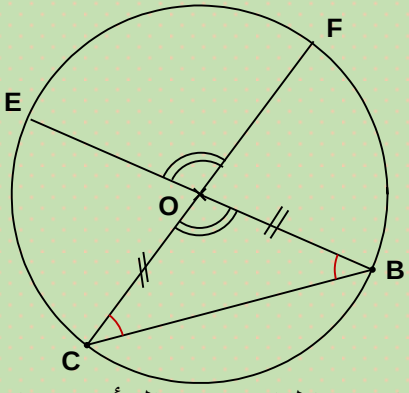
❖ في مثلث متساوي الأضلاع جميع الزوايا متقايسة وكل زاوية تساوي $60°$



❖ AB و AC و BC تسمى أوتار الدائرة .

❖ في المثلث المتساوي الساقين OBC لدينا :

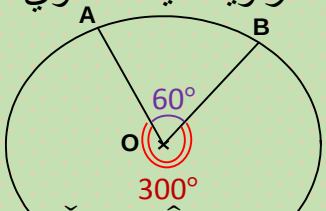
$O\hat{B}C = O\hat{C}B$ و $OB = OC$



❖ زاويتان متقابلتان بنفس الرأس متقايستان .

www.hsaina.com

❖ زاوية مليئة تساوي $360°$



$A\check{O}B + A\hat{O}B = 360°$

$A\check{O}B = 360° - A\hat{O}B = 300°$

3 coll

المثلثات المتقايسة و المثلثات المتشابهة

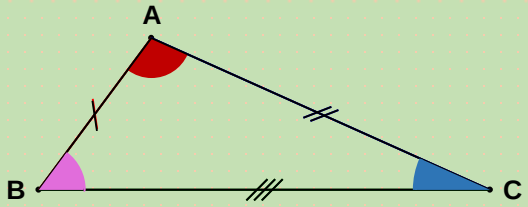
الجزء الأول : المثلثات المتقايسة

I. مفهوم المثلثات المتقايسة :

تعريف

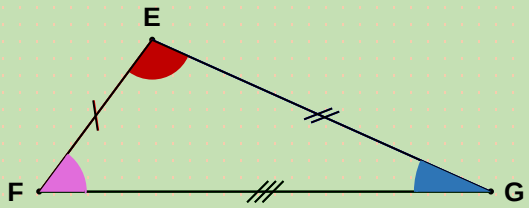
مثلثان متقايسان هما مثلثان قابلان للتطابق.

مثال :



- ✓ الضلعان $[AB]$ و $[EF]$ متناظران .
- ✓ الزاويتان $B\hat{A}C$ و $F\hat{E}G$ متناظرتان .

نتيجة :



$AB = EF$ و $AC = EG$ و $BC = FG$

$B\hat{A}C = F\hat{E}G$ و $A\hat{C}B = E\hat{G}F$ و $A\hat{B}C = E\hat{F}G$

خاصية

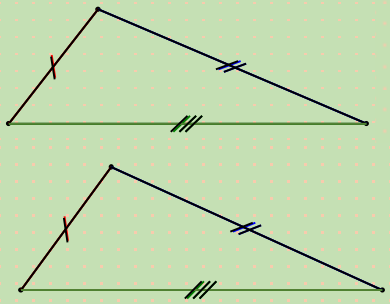
إذا كان مثلثان متقايسين فإن أضلاعهما المتناظرة متقايسة وزوايهما المتناظرة متقايسة.

www.hsaina.

II. حالات تقايس المثلثات :

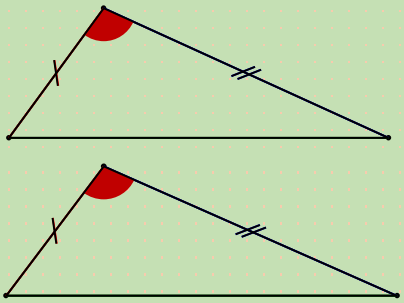
الحالة الأولى

ضلع - ضلع - ضلع



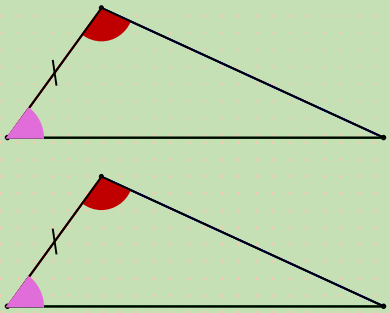
الحالة الثانية

ضلع - زاوية بينهما - ضلع



الحالة الثالثة

زاوية - ضلع بينهما - زاوية



الحالة الأولى : إذا قايست أضلاع مثلث على التوالي أضلاع مثلث آخر فإن هذين المثلثين متقايسان .

الحالة الثانية : إذا قايس ضلعان لمثلث والزاوية المحصورة بينهما على التوالي ضلعين لمثلث آخر والزاوية المحصورة بينهما فإن هذين المثلثين متقايسان .

الحالة الثالثة : إذا قايست زاويتان لمثلث والضلع المحاذي لهما على التوالي زاويتين لمثلث آخر والضلع المحاذي لهما فإن هذين المثلثين متقايسان .

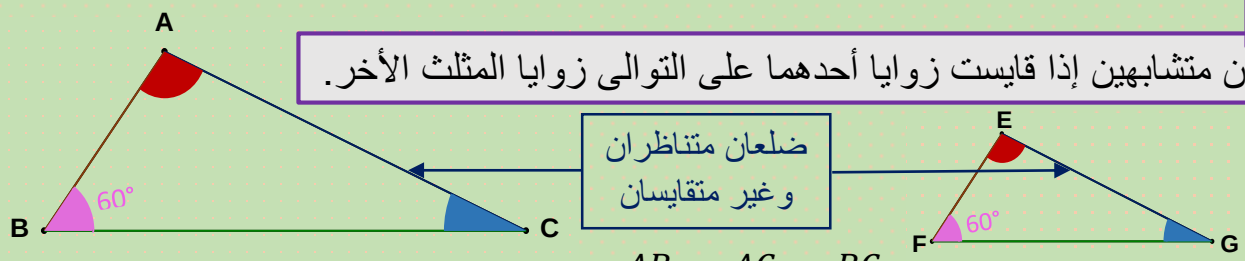
الجزء الثاني : المثلثات المتشابهة

I. مفهوم المثلثات المتشابهة :

تعريف

يكون مثلثان متشابهين إذا قايست زوايا أحدهما على التوالي زوايا المثلث الأخر.

مثال :



لاحظ أن :

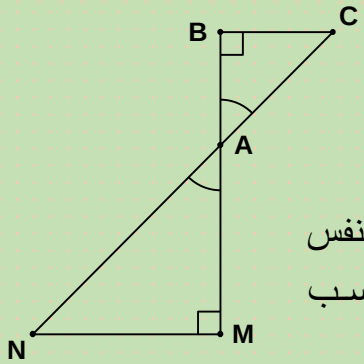
✓ الأضلاع المتناظرة متناسبة : $\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG} = \frac{BC}{FG} = k$ حيث k عدد حقيقي موجب يسمى نسبة التشابه

✓ الزوايا المتناظرة متقايسة : $B\hat{A}C = F\hat{E}G$ و $A\hat{C}B = E\hat{G}F$ و $A\hat{B}C = E\hat{F}G$

خاصية

إذا كان مثلثان متشابهين فإن زواياهما المتناظرة متقايسة وأضلاعهما المتناظرة متناسبة.

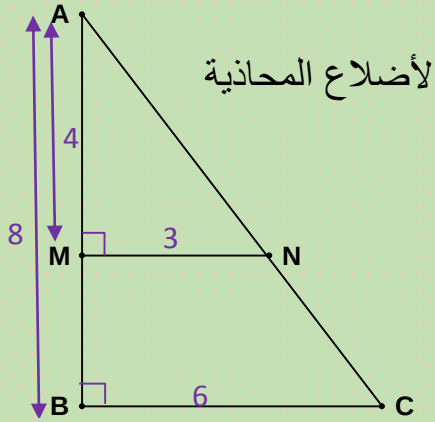
II. حالات تشابه المثلثات : نعتبر المثلثين ABC و AMN



الحالة الأولى : إذا قايست زاويتان لمثلث زوايتين لمثلث آخر فإن هذين المثلثين متشابهان .

مثال : لدينا في الشكل جانبه $B\hat{A}C = M\hat{A}N$ لأن كل زاويتان متقابلتان بنفس الـرأس تكونان متقايستين , ولـدينا أيضاً $A\hat{B}C = A\hat{M}N = 90°$ إذن حسب الحالة 1 للتشابه فإن المثلثين ABC و AMN متشابهان .

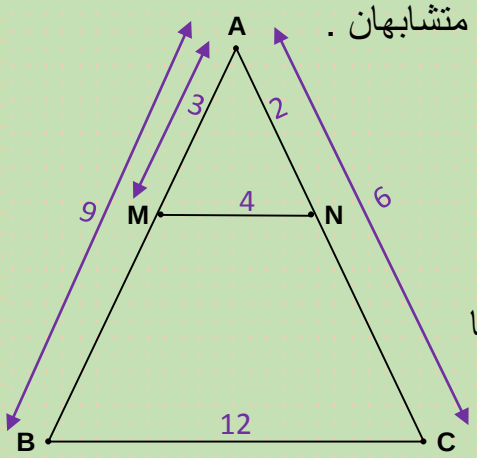
www.hsaina.com



الحالة الثانية : إذا قايست زاوية لمثلث زاوية لمثلث آخر وكانت أطوال الأضلاع المحاذية للزاويتين متناسبة فإن هذين المثلثين متشابهان .

مثال : لدينا في الشكل جانبه $A\hat{B}C = A\hat{M}N$

ولدينا $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ إذن حسب الحالة 2 للتشابه فإن المثلثين ABC و AMN متشابهان .



الحالة الثالثة : إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة في مثلثين فإنهما متشابهان .

مثال : لدينا $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN} = \frac{9}{3} = \frac{6}{2} = \frac{12}{4} = 3$

إذن حسب الحالة 3 للتشابه فإن المثلثين ABC و AMN متشابهان .

ملاحظة :

✓ يكون شكلان متشابهين إذا كان لهما نفس الشكل العام وكان أحدهما تكبيراً $(k > 1)$ أو تصغيراً $(k < 1)$ للآخر .

✓ نسبة التشابه k تقارن بين قياسين لهما نفس الوحدة وتستخدم مثلاً في عمل خرائط ورسوم هندسية بمقاييس مصغرة للأشكال الحقيقية مثلاً السلم $1cm$ لكل $100m$ تعني أن $1cm$ في الخريطة تمثل $100m$ في الواقع .